VA PIANO

# Exercices

**1** **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**2.** On peut conjecturer que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ en $-\infty$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -1$

**2.** On peut conjecturer que la courbe admet, d'une part, une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et, d'autre part, une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $2$ |

**3** **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$

**2.** On peut conjecturer que la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**4** **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

**2.** On peut conjecturer que la courbe admet deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -2$ et $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0{,}5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(-0{,}5)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2$ |

**5** **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

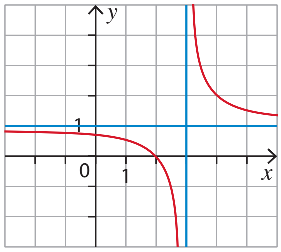
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$

**2.** La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

**3.**




**6** **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} f(x) = +\infty$

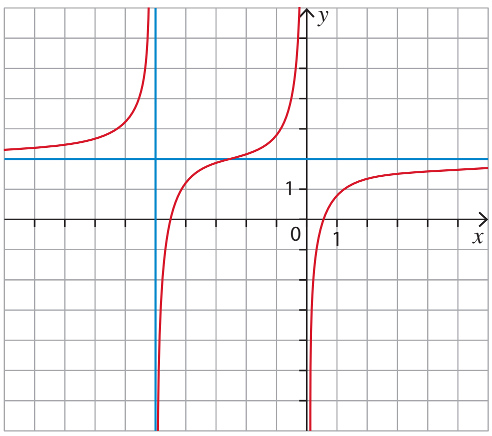
$\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

**2.** La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -5$ et $x = 0$.

**3.**




© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**7** **1.** Sur calculatrice.

**2. a.** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

**b.** Pour tout $x>6$, $f(x)\in]0{,}99\,;1{,}01[$.

**3. a.** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

**b.** Pour tout $x<-13$, $f(x)\in]0{,}999\,;1{,}001[$.

**8** **1.** Sur calculatrice.

**2. a.** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

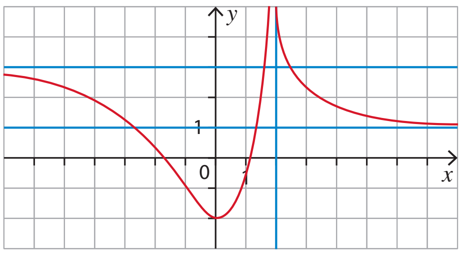
**b.** Cet algorithme détermine le plus petit entier naturel $A$ tel que $f(A)\geqslant 10\ 000$.

**3. a.** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

**b.** On remplace la boucle par :

```
Tant que A³ – A + 1 ⩾ –10 000
    A ← A – 1
```

**9** **1.**




**10** **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-1\right)=+\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-2x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-2x)=-\infty$.

**3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+x+1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+x+1\right)=+\infty$.

**4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}=+\infty$.

**11** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-4x)=-\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)(3-4x)=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)(3-4x)=+\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\mathrm{e}^x+3\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\mathrm{e}^x+3+\dfrac{5}{x}\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2\mathrm{e}^x+3\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2\mathrm{e}^x+3+\dfrac{5}{x}\right)=3$.

**3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-4x)=-\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(5-4x)=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)(3-4x)=-\infty$.

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3x^2}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{2}{3x^2}\right)=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\dfrac{2}{3x^2}\right)=+\infty$.

**12** **1.** Non en $+\infty$ et oui en $-\infty$.

**2.** Oui en $+\infty$ et en $-\infty$.

**3.** Non en $+\infty$ et en $-\infty$.

**4.** Non en $+\infty$ et en $-\infty$.

**5.** Oui en $+\infty$ et non en $-\infty$.

**6.** Non en $+\infty$ et en $-\infty$.

**13** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$.

On a $x^2+x-1=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^2+2\right)=-\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)=-\infty$.

On a $x^3-3x^2+2=x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)=+\infty$.

**3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+1)=-\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2+4x+1\right)=-\infty$.

On a $-2x^2+4x+1=-2x^2\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)=1$.

Donc, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+4x+1\right)=-\infty$.

**4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}-7x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-7x^2+x-2\right)=-\infty$.

On a $2x^3-7x^2+x-2=2x^3\left(1-\dfrac{7}{2x}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{7}{2x}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-7x^2+x-2\right)=+\infty$.

**14** **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}7x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+4)=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7x^2-2x+4\right)=+\infty$.

On a $7x^2-2x+4=7x^2\left(1-\dfrac{2}{7x}+\dfrac{4}{7x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}7x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{7x}+\dfrac{4}{7x^2}\right)=1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7x^2-2x+4\right)=+\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x\right)=+\infty$ .

On a $-2x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x=-2x^3\left(1-\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{2x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{2x^2}\right)=1$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right)=-\infty$.

**3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x-1=-\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-1\right)=-\infty$.

On a $-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-1=-\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{4}{3x}+\frac{2}{x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}x^2=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{3x}+\frac{2}{x^2}\right)=1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-1\right)=-\infty$.

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^4=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-7x+5=-\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4-7x+5\right)=-\infty$.

On a $-2x^4-7x+5=-2x^4\left(1+\frac{7}{2x^3}-\frac{5}{2x^4}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^4=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{7}{2x^3}-\frac{5}{2x^4}\right)=1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4-7x+5\right)=-\infty$.

**15** **1.** $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$.

**2.** $\frac{4x+3}{-2x+1}=\frac{4x\left(1+\frac{3}{4x}\right)}{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}=\frac{-2\left(1+\frac{3}{4x}\right)}{1-\frac{1}{2x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\left(1+\frac{3}{4x}\right)=-2$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{-2x+1}\right)=-2$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{-2x+1}\right)=-2$.

**3.** $\frac{-3x-1}{6-x}=\frac{-3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{-x\left(1-\frac{6}{x}\right)}=\frac{3\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{1-\frac{6}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}3\left(1+\frac{1}{3x}\right)=3$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{6}{x}\right)=1$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-1}{6-x}\right)=3$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-3x-1}{6-x}\right)=3$.

**4.** $\frac{-3-8x}{5-x}=\frac{-8x\left(1+\frac{3}{8x}\right)}{-x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=\frac{8\left(1+\frac{3}{8x}\right)}{1-\frac{5}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}8\left(1+\frac{3}{8x}\right)=8$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)=1$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3-8x}{5-x}\right)=8$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-3-8x}{5-x}\right)=8$.

**16** **1.** $\frac{x^2+1}{1-x}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}-x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right)=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right)=+\infty$.

**2.** $\frac{x+3}{-2x^2+1}=\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=\frac{1+\frac{3}{x}}{-2x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{-2x^2+1}\right)=0$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{-2x^2+1}\right)=0$.

**3.** $\frac{-3x-1}{-5x^2+x-2}=\frac{-3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{-5x^2\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x^2}\right)}=\frac{-3\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{-5x\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}-3\left(1+\frac{1}{3x}\right)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-5x\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x^2}\right)=-\infty$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-1}{-5x^2+x-2}\right)=0$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-3x-1}{-5x^2+x-2}\right)=0$.

**4.** $\frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}=\frac{4x^3\left(1-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}\right)}{-x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\frac{-4x\left(1-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}-4x\left(1-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}\right)=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}\right)=-\infty$.

**17** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x\sqrt{x}=+\infty$.

**2.** $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=+\infty$.

**3.** $\frac{2x+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$.

**4.** $\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)=0$.

**18** **1.** $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x-3)=0$. Lorsque $x>3$, alors $x-3>0$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\left(\frac{1}{x-3}\right)=+\infty$.

**2.** $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(x-3)=0$. Lorsque $x<3$, alors $x-3<0$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \left(\dfrac{1}{x-3}\right) = -\infty$.

**3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (1-x) = 0$. Lorsque $x>1$, alors $1-x<0$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{2}{1-x}\right) = -\infty$.

**4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x) = 0$. Lorsque $x<1$, alors $1-x>0$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\dfrac{2}{1-x}\right) = +\infty$.

**19** **1.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} -3x = -6$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (2x-4) = 0$. Lorsque $x>2$, alors $2x-4>0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{-3x}{2x-4}\right) = -\infty$.

**2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} -3x = -6$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (2x-4) = 0$. Lorsque $x<2$, alors $2x-4<0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left(\dfrac{-3x}{2x-4}\right) = +\infty$.

**3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \left(x^2-10\right) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (6-2x) = 0$. Lorsque $x>3$, alors $6-2x<0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \left(\dfrac{x^2-10}{6-2x}\right) = +\infty$.

**4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \left(x^2-10\right) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (6-2x) = 0$. Lorsque $x<3$, alors $6-2x>0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \left(\dfrac{x^2-10}{6-2x}\right) = -\infty$.

**20** **1.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ et pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} -2x = -1$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (4x-2)^2 = 0$ et pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$, $(4x-2)^2 > 0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{-2x}{(4x-2)^2} = -\infty$.

**21** **1.** Pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 2x-2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $f$ est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

**2.** $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x+5 = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

On a $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**22** **1.** Pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 3x^2-2x-5$.

$\Delta = 64$, donc $f'(x)$ a deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{5}{3}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $f$ est donc croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $\left[-1\,;\dfrac{5}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right[$.

**2.** On a $f(x) = x^3\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\frac{148}{27}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**23** **1.** Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $(x-1)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

$f$ est donc croissante sur $]-\infty\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

**2.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

De même, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**3.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$. Lorsque $x<1$, alors $x-1<0$ et $f(x)>0$.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Lorsque $x>1$, alors $x-1>0$ et $f(x)<0$.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

**4.**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

**24** **1.** Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$f'(x) = \dfrac{1(4-2x)+2x}{(4-2x)^2} = \dfrac{4}{(4-2x)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $(4-2x)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. $f$ est donc croissante sur $]-\infty\,;2[$ et croissante sur $]2\,;+\infty[$.

**2.** $f(x) = \dfrac{x}{-2x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{1}{-2\left(1-\frac{2}{x}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} -2\left(1-\dfrac{2}{x}\right) = -2$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

De même, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**3.** $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2}(4-2x) = 0$.

Lorsque $x < 2$, alors $4-2x > 0$ et pour $x$ proche de 2, $f(x) > 0$.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$.

Lorsque $x > 2$, alors $4-2x < 0$ et pour $x$ proche de 2, $f(x) < 0$.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

**4.**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $+\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ |
| | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | |

**25** **1.** • La courbe représentative de la fonction $g$ est un polynôme de degré 2, donc représentée par la seule parabole, qui est la courbe d.

• Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction $h$ ne possède donc pas d'asymptote horizontale : c'est la courbe a.

• $k(x) = 1 + \dfrac{x}{x^2-1} = 1 + \dfrac{x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1 + \dfrac{1}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$. Donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$.

La courbe représentative de la fonction $k$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

C'est la courbe c.

• Enfin, la fonction $f$ est représentée par la courbe b.

**26** **a.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $g(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$.

**c.** $f(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

**27** **a.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $g(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $g(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

**c.** $f(x) = \dfrac{5}{x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $g(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$.

**28**

$$\frac{(5-2x)(2+ax)}{3x^2+5} = \frac{-2ax^2+(5a-4)x+10}{3x^2+5} = \frac{-2ax^2\left(1+\frac{5a-4}{-2ax}-\frac{5}{ax^2}\right)}{3x^2\left(1+\frac{5}{3x^2}\right)} = \frac{-2a\left(1+\frac{5a-4}{-2ax}-\frac{5}{ax^2}\right)}{3\left(1+\frac{5}{3x^2}\right)}.$$

Pour tout réel $a$, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{5a-4}{-2ax}-\dfrac{5}{ax^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x^2}\right) = 1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(5-2x)(2+ax)}{3x^2+5}\right) = -\dfrac{2a}{3}$.

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(5-2x)(2+ax)}{3x^2+5}\right) = 8 \Leftrightarrow -\frac{2a}{3} = 8 \Leftrightarrow -2a = 24$$

$$\Leftrightarrow a = -12.$$

**29** $f(x) = \dfrac{5-2x}{2x-3} = \dfrac{-2x\left(1-\frac{5}{2x}\right)}{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)} = \dfrac{-\left(1-\frac{5}{2x}\right)}{1-\frac{3}{2x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{2x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right) = 1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1{,}5} 5-2x = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1{,}5}(2x-3) = 0$.

Lorsque $x < 1{,}5$, alors $2x-3 < 0$ et, pour $x$ proche de 1,5, $f(x) < 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1{,}5\\ x<1{,}5}} f(x) = -\infty$.

Lorsque $x > 1{,}5$, alors $2x-3 > 0$ et, pour $x$ proche de 1,5, $f(x) > 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1{,}5\\ x>1{,}5}} f(x) = +\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1{,}5$.

**30** $f(x) = \dfrac{3+2x}{x^2+1} = \dfrac{2x\left(1+\frac{3}{2x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2\left(1+\frac{3}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\dfrac{3}{2x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **Réponse b.**

**31** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

**3.** On a $h(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} g(X) = 0$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

**32** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**33** $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{1-\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\dfrac{1}{2x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$.

Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1} = 2$.

De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \sqrt{2}$.

**34** $\dfrac{x^2+1}{3-x} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{-x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{3}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{3}{x} = 1$.

Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{3-x} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**35** D'après l'exercice précédent, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{3-x} = +\infty$.
De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} r(x) = +\infty$.

**36** **1.** $x^2 - 3x + 2 = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$.
**2.** De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} s(x) = +\infty$.

**37** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \cos(X) = 1$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} t(x) = 1$.

**38** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - x^2\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X^3 = -\infty$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**39** **1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.
De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**2.** $f(x) = \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)} = \dfrac{x^2 - \left(x^2+1\right)}{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}$

$= \dfrac{-1}{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}$.

**3.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2+1} = -\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

**40** $\dfrac{n^2+1}{n+2} = \dfrac{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{1 + \dfrac{2}{n}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{n} = 1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{1 + \dfrac{2}{n}} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**41** **1.** Pour tout entier naturel $n$ :

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

**2.** $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$, puis par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**42** Pour tout entier naturel $n$ :

$v_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}$

$= \dfrac{\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}$

$= \dfrac{2n+3-(2n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2n + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2n+3} = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1} = +\infty$, puis par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

**43** **1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{6} = +\infty$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{x^2}{6}$.
Donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**2.** Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 0$ et, pour tout $x \neq 0$, $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x}$, alors, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

**3.** Comme $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$, alors, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et, de même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$.
Ainsi, on peut conclure à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

**4.** Comme $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}$, alors, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x+1} = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Comme ces limites sont différentes, alors le théorème des gendarmes ne permet pas de conclure.

**44** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Donc $-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$ et $x^2 - 1 \leqslant x^2 - \cos(x) \leqslant x^2 + 1$.
Comme $f(x) \geqslant x^2 - 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$, alors, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

**45** Pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ 0[ \cup ]0\ ;\ +\infty[$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
Donc $-\dfrac{1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

**46** Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
Donc $-e^x \leqslant m(x) \leqslant e^x$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x) = 0$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**47** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$.

**2.** $e^x-x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-x=+\infty$.

**3.** $xe^{-x}=\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. Donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$ et, pour $x$ proche de $-\infty$, $\dfrac{e^x}{x}<0$.

Donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$.

**4.** $e^x-1\,000x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\,000\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\,000\right)=+\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-1\,000x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-1000x=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1\,000x=+\infty$.

**48** **1.** $\dfrac{e^x-4x}{e^x+7}=\dfrac{e^x\left(1-4\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{7}{e^x}\right)}=\dfrac{1-4\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}}{1+\dfrac{7}{e^x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. Donc, par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{x\to+\infty}1-4\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}=1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{7}{e^x}=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-4x}{e^x+7}=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-4x=+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+7=7$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-4x}{e^x+7}=+\infty$.

**2.** $\dfrac{e^x-4x}{x}=\dfrac{e^x}{x}\left(1-4\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. Donc, par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-4\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}\right)=1$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-4x}{x}=+\infty$.

$\dfrac{e^x-4x}{x}=\dfrac{e^x}{x}-4$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}-4=-4$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-4x}{x}=-4$.

**49** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. **Réponse a.**

MODERATO

# Exercices

**50** **1.** Pour tout nombre réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$f'(x)=\dfrac{3(1-x)+3x-2}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $(1-x)^2>0$ et donc $f'(x)>0$. La fonction $f$ est donc croissante sur $]-\infty\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

**2.** $f(x)=\dfrac{3x\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)}{-x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{-3\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}-3\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-3$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=-3$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1$ et $\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$.

Lorsque $x<1$, alors $1-x>0$ et, pour $x$ proche de 1, $f(x)>0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$.

Lorsque $x>1$, alors $1-x<0$ et, pour $x$ proche de 1, $f(x)<0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $-3$ |

**51** **1.** Pour tout nombre réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$,

$f'(x)=\dfrac{-2(-x-3)+5-2x}{(-x-3)^2}=\dfrac{11}{(-x-3)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $(-x-3)^2>0$ et donc $f'(x)>0$. La fonction $f$ est donc croissante sur $]-\infty\,;-3[$ et croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

**2.** $f(x)=\dfrac{-2x\left(1-\dfrac{5}{2x}\right)}{-x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\dfrac{2\left(1-\dfrac{5}{2x}\right)}{1+\dfrac{3}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(1-\dfrac{5}{2x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3}(5-2x)=11$ et $\lim\limits_{x\to-3}(-x-3)=0$.

Lorsque $x<-3$, alors $-x-3>0$ et, pour $x$ proche de $-3$, $f(x)>0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)=+\infty$.

Lorsque $x>-3$, alors $-x-3<0$ et, pour $x$ proche de $-3$, $f(x)<0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=-\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-3$.

**3.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ |

**52** **1.** $f$ est définie pour tout nombre réel $x$ tel que $x^2+x-2\neq 0$.

Le trinôme $x^2+x-2$ admet deux racines évidentes, $x_1=-2$ et $x_2=1$. Ainsi, la fonction $f$ est définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

**2.** Pour tout nombre réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$,

$f'(x)=-\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x-2\right)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$, $\left(x^2+x-2\right)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x-1$, c'est-à-dire $f'(x)\geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,\left]-2\,;-\frac{1}{2}\right]$ et $f'(x)\leqslant 0$ sur $\left[-\frac{1}{2}\,;1\right[\,\cup\,]1\,;+\infty[$. La fonction $f$ est donc croissante sur les intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $\left]-2\,;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;1\right[$ et $]1\,;+\infty[$.

**3.** Comme on a $f(x)=\dfrac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)}$, alors, par quotient,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=0$ et

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$.

De même, comme $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-2\right)=0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet deux asymptotes verticales d'équations respectives $x=-2$ et $x=1$.

**4.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{4}{9}$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

**53** **1.** La fonction $f$ est définie pour tout nombre réel $x$ tel que $x^2-2x+3\geqslant 0$.

$\Delta=(-2)^2-4\times3=-8$, donc, pour tout nombre réel $x$, $x^2-2x+3>0$ et la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**2.** On a $f(x)=\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$, alors, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

**54** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$, alors, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

**55** **1.** $\dfrac{3e^x+1}{1+e^x}=\dfrac{3e^x\left(1+\frac{1}{3e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{3\left(1+\frac{1}{3e^x}\right)}{1+\frac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{3e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{e^x}=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x+1}{1+e^x}=3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. Donc, par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x+1}{1+e^x}=1$.

**2.** $\dfrac{e^x+3}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{1+\frac{3}{e^x}}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{e^x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^{2x}}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{X\to0} X^2=0$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)^2=0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3=3$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+3}{e^{2x}}=+\infty$.

**3.** $\dfrac{\left(e^x+5\right)(x-2)}{x+3}=\dfrac{x\left(e^x+5\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{\left(e^x+5\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+5=+\infty$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x+5\right)(x-2)}{x+3}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+5=5$.

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(e^x+5\right)(x-2)}{x+3}=5$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**4.** $\dfrac{7e^x+1}{(e^x+3)^2}=\dfrac{e^x\left(7+\dfrac{1}{e^x}\right)}{(e^x)^2\left(1+\dfrac{6}{e^x}+\dfrac{9}{(e^x)^2}\right)}=\dfrac{7+\dfrac{1}{e^x}}{e^x\left(1+\dfrac{6}{e^x}+\dfrac{9}{(e^x)^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 7+\dfrac{1}{e^x}=7$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{6}{e^x}+\dfrac{9}{(e^x)^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7e^x+1}{(e^x+3)^2}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3=3$ et $\lim\limits_{X\to3} X^2=9$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+3)^2=9$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 7e^x+1=1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7e^x+1}{(e^x+3)^2}=\dfrac{1}{9}$.

**5.** $\dfrac{e^x+3}{x}=\dfrac{e^x}{x}\left(1+\dfrac{3}{e^x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{3}{e^x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+3}{x}=0$.

**6.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-5=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+700=+\infty$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-5)(x+700)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-5=-5$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+700=-\infty$.

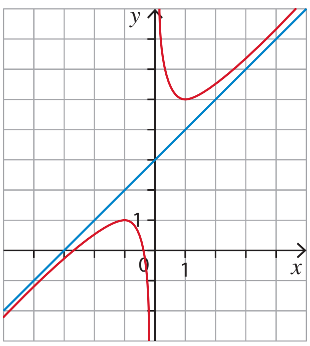
Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-5)(x+700)=+\infty$.

**56** **1.** $\lim\limits_{x\to0}(x^2+3x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to0} x=0$, alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

**2.** On a $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x}$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

**3.**




On constate que lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe semble se rapprocher de la droite d'équation $y=x+3$.

**4.** Pour tout $x\neq0$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

**57** **1.** $\lim\limits_{x\to0}(2x^2-5x-2)=1$ et $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$, alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=+\infty$.

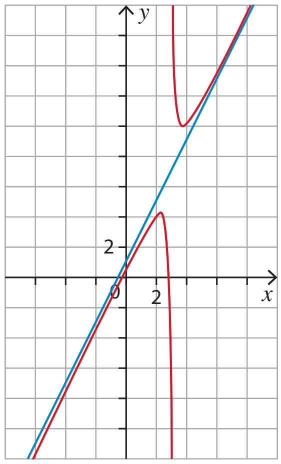
La courbe représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=3$.

**2.** On a $f(x)=\dfrac{2x^2\left(1-\dfrac{5}{2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}=\dfrac{2x\left(1-\dfrac{5}{2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1-\dfrac{3}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(1-\dfrac{5}{2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=1$, donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

**3.**




**4.** $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{ax^2+(b-3a)x+c-3b}{x-3}$

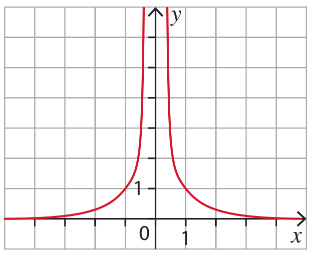
$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b-3a=-5\\c-3b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\end{cases}$.

**5.** Pour tout $x\neq3$, $g(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-3}-(2x+1)=\dfrac{1}{x-3}$.

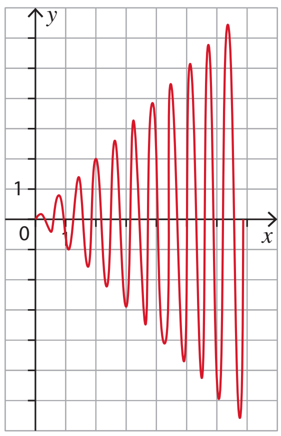
Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

On peut en déduire que la droite d'équation $y=2x+1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction $f$.

**58** **1.**




**2.**




© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

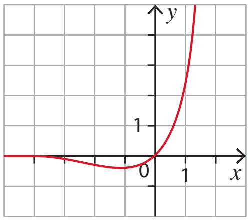
**59** **1. Faux.** Contre-exemple, $f(x) = \frac{1}{x} - x$ définie sur $]0\ ;+\infty[$.

**2. Vrai.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

**3. Faux.** Contre-exemple, $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $f$ est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

**4. Faux.** Contre-exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;0[$.

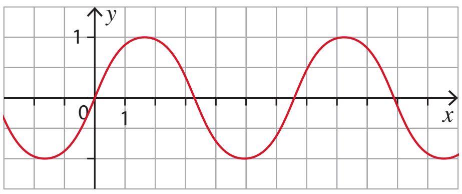
**60** **1. Faux.** Contre-exemple, voir le graphique ci-dessous.




**2. Vrai.** Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, alors, par définition, l'intervalle ouvert $]0\ ;2[$, contenant 1, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. Il existe donc un réel $A$ tel que, pour tout $x > A$, $f(x) \in ]0\ ;2[$ et donc $f(x) > 0$.

**3. Vrai.** Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et, pour tout $x < 0$, $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{x}$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

**4. Faux.** Contre-exemple, voir le graphique ci-dessous de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

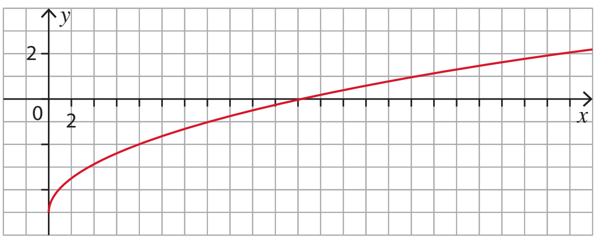



**61** **1. a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3x^2\left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x^2}\right) = +\infty$.

**b.** L'algorithme renvoie la valeur du plus petit entier $x$ tel que $f(x) \geqslant A$.

**c.** Pour $A = 100$, il affiche 6. Pour $A = 1\,000$, il affiche 19. Pour $A = 10\,000$, il affiche 58.

**2. a.**




**b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(1 - \frac{25}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \dfrac{\sqrt{x}\left(1 - \frac{25}{x}\right)}{1 + \frac{5}{x}} = +\infty$.

**c.** On remplace la ligne « Tant que $3x^2 - x - 1 < A$ » par « Tant que $\dfrac{x - 25}{\sqrt{x} + 5} < A$ ».

**d.** Pour $A = 10$, il affiche 225. Pour $A = 1\,000$, il affiche 11 025. Pour $A = 10\,000$, l'algorithme tourne longtemps sans afficher de résultat.

**e.** Pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{x - 25}{\sqrt{x} + 5} = \dfrac{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)}{\sqrt{x} + 5} = \sqrt{x} - 5$.

Ainsi, pour tout nombre réel $A$, $\dfrac{x - 25}{\sqrt{x} + 5} \geqslant A \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 \geqslant A$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant A + 5$
$\Leftrightarrow x \geqslant (A + 5)^2$.

L'algorithme suivant affiche les bonnes valeurs instantanément : $x \leftarrow (A + 5)^2$.
On obtient alors 1 010 025 pour $A = 1\,000$ et 10 001 000 025 pour $A = 100\,000$.

**62** **1.** $(50 + x^{30})^2 = 2\,500 + 100x^{30} + x^{60}$, donc
$f(x) = \dfrac{100x^{30} + x^{60}}{x^{30}} = 100 + x^{30}$.
Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 100$.

**2.** Non, on obtient pour $f(x)$ des valeurs proches de 0 et même égales à 0 lorsque $x$ est proche de 0 alors que l'on devrait obtenir des valeurs proches de 100.

**3.** On obtient des résultats similaires, donc en contradiction avec la limite calculée à la question 1. Ces résultats s'expliquent par le nombre de chiffres significatifs utilisés par la calculatrice, qui est au maximum égal à 12.
Comme $0{,}4^{30} \approx 1{,}5 \times 10^{-12}$, alors, pour la calculatrice, $50 + 0{,}4^{30} = 50$, donc $f(0{,}4) = 0$ et, de la même façon, pour tous les nombres de l'intervalle $[0{,}4\ ;0[$.

**63** **1.** $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$, alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

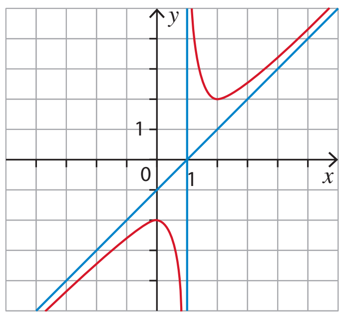
Par ailleurs, on a $f(x) = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x}}$, donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

**2. a.** Pour tout nombre réel $x \neq 1$,
$x - 1 + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = f(x)$.

**b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0$ et, de même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x - 1) = 0$.

**3.**




La droite $d$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

**4.** $f(x) - (x - 1) = \dfrac{1}{x - 1}$, donc $f(x) - (x - 1) < 0$ sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$ et la courbe est au-dessus de la droite $d$ sur cet intervalle. De plus, $f(x) - (x - 1) < 0$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;1[$ et la courbe est en dessous de la droite $d$ sur cet intervalle.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**64** **1.** Soit $f(x)=\mathrm{e}^x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^0}{h-0}=f'(0)=\mathrm{e}^0=1.$

**2.** Soit $f(x)=x^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^3-8}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^3-2^3}{t-2}=f'(2)=3\times 2^2=12.$

**3.** Soit $f(x)=\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{t\to 25}\dfrac{\sqrt{t}-5}{t-25}=\lim\limits_{t\to 25}\dfrac{\sqrt{t}-\sqrt{25}}{t-25}=f'(25)=\dfrac{1}{2\sqrt{25}}=\dfrac{1}{10}.$

**65** **1.** $-5h^3+2h-1=-5h^3\left(1-\dfrac{2}{5h^2}+\dfrac{1}{5h^3}\right).$

$\lim\limits_{h\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{5h^2}+\dfrac{1}{5h^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{h\to-\infty}-5h^3=+\infty.$

Donc, par produit, $\lim\limits_{h\to-\infty}-5h^3+2h-1=+\infty.$

**2.** $\lim\limits_{h\to-\infty}-5h^3+2h-1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{h\to-\infty}\mathrm{e}^{-5h^3+2h-1}=+\infty.$

**3.** $\lim\limits_{h\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{5h^2}+\dfrac{1}{5h^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{h\to+\infty}-5h^3=-\infty.$

Donc, par produit, $\lim\limits_{h\to+\infty}-5h^3+2h-1=-\infty.$

$\lim\limits_{h\to+\infty}-5h^3+2h-1=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{h\to+\infty}\mathrm{e}^{-5h^3+2h-1}=0.$

**66** **1.** $\dfrac{7}{x}-3x+x^2=x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right).$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty.$

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x}-3x+x^2=+\infty.$

De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{7}{x}-3x+x^2}=+\infty.$

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+5\mathrm{e}^x\right)=4$ et $\lim\limits_{X\to 4}\sqrt{X}=2.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+5\mathrm{e}^x}=2.$

**3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=0.$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}3x+1=-\infty$, donc, par somme,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}+3x+1=-\infty.$

**4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{7}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\mathrm{e}^X=1.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-\frac{7}{x}}=1.$

**67** Pour tout réel $x$, on pose $X=-x$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $-\infty$. On a $\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}=\dfrac{-X\mathrm{e}^X}{(-X)^2+1}=\dfrac{-X\mathrm{e}^X}{X^2+1}.$

Or $\lim\limits_{X\to-\infty}X\mathrm{e}^X=0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}X^2+1=+\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{-X\mathrm{e}^X}{X^2+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{-X\mathrm{e}^X}{X^2+1}=0.$

**68** **1.** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

Pour tout nombre réel $x\geqslant 0$,

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$, alors, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

**2.** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0.$

Pour tout nombre réel $x\neq 1$,

$$g(x)=\frac{x^2+x+1}{(1-x)^3}=\frac{x^2+x+1}{-x^3+3x^2-3x+1}$$

$$=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}.$$

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0.$

**69** **1.** Pour tout $x<-1$,

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+x}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{x-\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\frac{x^2-x^2-x}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{-x}{x-(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X}=1.$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1$. Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{1}{2}.$

**3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty.$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x+\sqrt{x^2+x}=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x+\sqrt{x^2+x}=0.$

La courbe représentative de $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=-\dfrac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

**70** **1.** $f_k(0)=-2+k.$

La courbe bleu clair passe par le point de coordonnées $(0\,;2)\Leftrightarrow -2+k=2\Leftrightarrow k=4.$

La courbe rouge passe par le point de coordonnées $(0\,;1)\Leftrightarrow -2+k=1\Leftrightarrow k=3.$

La courbe verte passe par le point de coordonnées $(0\,;0)\Leftrightarrow -2+k=0\Leftrightarrow k=2.$

La courbe marron passe par le point de coordonnées $(0\,;-1)\Leftrightarrow -2+k=-1\Leftrightarrow k=1.$

La courbe bleu foncé passe par le point de coordonnées $(0\,;-2)\Leftrightarrow -2+k=-2\Leftrightarrow k=0.$

La courbe violette passe par le point de coordonnées $(0\,;-3)\Leftrightarrow -2+k=-3\Leftrightarrow k=-1.$

La courbe orange passe par le point de coordonnées $(0\,;-4)\Leftrightarrow -2+k=-4\Leftrightarrow k=-2.$

La courbe verte passe par le point de coordonnées $(0\,;-5)\Leftrightarrow -2+k=-5\Leftrightarrow k=-3.$

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**2. a.** Pour tout réel $x$, on pose $X=-x$.
Lorsque $x$ tend vers $-\infty$, $X$ tend vers $+\infty$.

On a $x-2+k\mathrm{e}^{-x}=-X-2+k\mathrm{e}^{X}=-X\left(1+\dfrac{2}{X}-k\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}\right)$.

Or $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}=+\infty$.

Si $k>0$, alors $\lim\limits_{X\to+\infty}k\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}=+\infty$ et par opérations sur les limites, $\lim\limits_{X\to+\infty}-X\left(1+\dfrac{2}{X}-k\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}\right)=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}-X\left(1+\dfrac{2}{X}-k\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}\right)=+\infty$.

De même, si $k\leqslant 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=-\infty$.

**b.** Pour tout réel $x$, on pose $X=-x$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $-\infty$. On a $x-2+k\mathrm{e}^{-x}=-X-2+k\mathrm{e}^{X}$.

On a $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$, donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{X\to-\infty}-X-2+k\mathrm{e}^{X}=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{X\to-\infty}-X-2+k\mathrm{e}^{X}=+\infty$.

**3. a.** $f_k'(x)=1-k\mathrm{e}^{-x}$.
Si $k\leqslant 0$, pour tout réel $x$, $f_k'(x)\geqslant 0$.
On en déduit que la fonction $f_k$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_k'(x)$ | + | |
| $f_k(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

Si $k>0$, $f_k'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-k\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow -k\mathrm{e}^{-x}\geqslant -1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\leqslant\dfrac{1}{k}\Leftrightarrow -x\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{k}\right)\Leftrightarrow x\geqslant\ln(k)$.

On en déduit que la fonction $f_k$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ln(k)]$ et croissante sur $[\ln(k);+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(k)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k'(x)$ | | $-$ | 0 | + | |
| $f_k(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\ln(k)-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**b.** $A_k(\ln(k)\,;\ln(k)-1)$. On remarque que $y_{A_k}=x_{A_k}-1$.

Ainsi, les points $A_k$ appartiennent tous à la droite d'équation $y=x-1$.

**71** **1.** $f(t)=\dfrac{10}{1+\mathrm{e}^{2-0{,}5t}}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}2-0{,}5t=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$, donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{2-0{,}5t}=0$.

Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=10$.

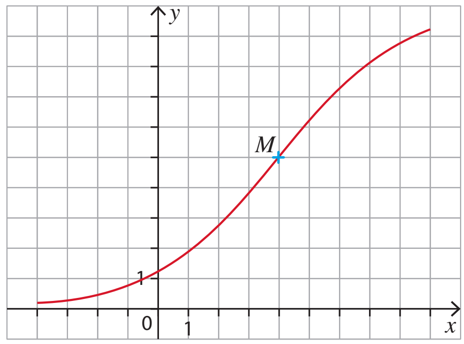
$\lim\limits_{t\to-\infty}2-0{,}5t=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X}=+\infty$, donc, par composition, $\lim\limits_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{2-0{,}5t}=+\infty$.

Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$.

**2.** $f'(t)=\dfrac{-10\times(-0{,}5)\mathrm{e}^{2-0{,}5t}}{\left(1+\mathrm{e}^{2-0{,}5t}\right)^2}=\dfrac{5\mathrm{e}^{2-0{,}5t}}{\left(1+\mathrm{e}^{2-0{,}5t}\right)^2}$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'>0$.
On en déduit que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**3.**




Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x_M-x\in\mathbb{R}$ et $x_M+x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{2}[f(x_M-x)+f(x_M+x)]=\frac{1}{2}[f(4-x)+f(4+x)]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{10}{1+\mathrm{e}^{2-2+0{,}5x}}+\frac{10}{1+\mathrm{e}^{2-2-0{,}5x}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{10}{1+\mathrm{e}^{0{,}5x}}+\frac{10}{1+\mathrm{e}^{-0{,}5x}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{10}{1+\mathrm{e}^{0{,}5x}}+\frac{10\mathrm{e}^{0{,}5x}}{1+\mathrm{e}^{0{,}5x}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{10\left(1+\mathrm{e}^{0{,}5x}\right)}{1+\mathrm{e}^{0{,}5x}}\right]=5=y_M.$$

Le point $M(4\,;5)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f$.

**72** **1.** $P(0)=250\Leftrightarrow\dfrac{a}{0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{0}}=250\Leftrightarrow\dfrac{a}{4}=250$
$\Leftrightarrow a=1\,000$.

**2.** $P(t)=\dfrac{1\,000}{0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}-0{,}5t=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$, donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0{,}5t}=0$.

Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=2\,500$.

Le nombre de grenouilles tend vers 2 500 individus lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**3.** $P'(t)=\dfrac{-1\,000\times3{,}6\times(-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{\left(0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)^2}=\dfrac{1\,800\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{\left(0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)^2}$.

Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$, $P'>0$.
On en déduit que la fonction $P$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**4.**

```
from math import exp

def P(t):
    return 1000/(0.4+3.6*exp(-0.5*t))

def seuil():
    t=0
    while P(t)<=2000:
        t=t+1
    return(t)
```

```
>>> seuil()
8
>>>
```

La population de grenouilles dépassera pour la première fois 2 000 individus en 2008.

**73** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times f'(x)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))\times\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x))=1$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.
**2.** $(u^2)'=2u'u$. Or, pour satisfaire aux conditions précédentes, il faut que $u'u=1$.
Ainsi, $(u^2)'=2$ et $u^2=2x$.
La fonction $f(x)=\sqrt{2x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ est telle que pour tout $x\in]0\,;+\infty[$,
$f(x)\times f'(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

**74** **1.** Pour tout $x\neq 0$,

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}x\sqrt{x}}{x\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x}=\sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}=f(x).$$

**2.** $\frac{x}{\mathrm{e}^x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.
Par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}}=0$.
Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$.
**3.** La courbe représentative de la fonction $f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
**4.** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{1-x}-\sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}^{1-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

$=\mathrm{e}^{1-x}\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right)$.

Pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{1-x}>0$ et $2\sqrt{x}>0$.
$1-2x>0\Leftrightarrow 2x<1\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$.
La fonction $f'$ est donc positive sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On en déduit que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
**5.** L'observation de la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'écran de la calculatrice permet de vérifier les résultats précédents.

**75** **1.** Le point $A$ d'abscisse $x$ appartient à la courbe représentative de la fonction $f$, il a donc pour coordonnées $\left(x\,;(-x+4)\mathrm{e}^{-x}\right)$ et l'aire du rectangle $g(x)=x\times(-x+4)\mathrm{e}^{-x}=\left(-x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}$.
**2.** On pose $X=-x$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $-\infty$.
On a $\left(-x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}=\left(-X^2-4X\right)\mathrm{e}^X=-X^2\mathrm{e}^X-4X\mathrm{e}^X$.
Or $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2\mathrm{e}^X=\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X=0$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{X\to-\infty} -X^2\mathrm{e}^X-4X\mathrm{e}^X=0$.
**3.** La fonction $g$ est définie et dérivable sur $[0\,;1]$ et
$g'(x)=(-2x+4)\mathrm{e}^{-x}-\left(-x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}=\left(x^2-6x+4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout $x\in[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x}>0$ et le trinôme $x^2-6x+4$ a pour discriminant $\Delta=20$. Il admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1=3+\sqrt{5}>1$ et $x_2=3-\sqrt{5}$. De plus, $a=1>0$, donc la fonction $g'$ est positive sur l'intervalle $\left[0\,;3-\sqrt{5}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[3-\sqrt{5}\,;1\right]$.
On en déduit que la fonction $g$ est croissante sur $\left[0\,;3-\sqrt{5}\right]$ et décroissante sur $\left[3-\sqrt{5}\,;1\right]$.
**4.** $g(5)=-5\mathrm{e}^{-5}<0$. La fonction $g$ représente l'aire du rectangle, celle-ci ne pouvant pas être négative, la fonction $g$ n'est pas correcte pour tout $x$ de $[0\,;+\infty[$.

**76** **1.** Pour tout réel $x$ positif,

$$-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1\Leftrightarrow -3\leqslant\cos(x)-2\leqslant -1$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{-1}\leqslant\frac{1}{\cos(x)-2}\leqslant\frac{1}{-3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{2x+3}{-1}\leqslant\frac{2x+3}{\cos(x)-2}\leqslant\frac{2x+3}{-3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{2x+3}{-1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2x+3}{-3}.$$

**2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{-3}=-\infty$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

**77** **1.** Pour tout réel $x$ négatif,

$$-1\leqslant\cos(5x)\leqslant 1\Leftrightarrow -3\leqslant 3\cos(5x)\leqslant 3$$
$$\Leftrightarrow -3+2x\leqslant 3\cos(5x)+2x\leqslant 3+2x$$
$$\Leftrightarrow\frac{2x-3}{3-2x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2x+3}{3-2x}.$$

**2.** Pour tout réel $x$ négatif,

$$\frac{2x-3}{3-2x}=-1 \text{ et } \frac{2x+3}{3-2x}=\frac{2x\left(1+\frac{3}{2x}\right)}{-2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}=-\frac{1+\frac{3}{2x}}{1-\frac{3}{2x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{3}{2x}=1$.
Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{3-2x}=-1$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

**78** **Partie A**
**1.** Pour tout réel $x$, $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$.
**2.** $g'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x-1\geqslant 0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x-1\geqslant 0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x\geqslant 1\Leftrightarrow x\geqslant 0$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.
$\mathrm{e}^x-x=-x\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$.
Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
Enfin, $g(0)=1$. On en déduit le tableau de variation de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Partie B**
**1.** D'après la partie A, $\mathrm{e}^x-x>0$, la fonction $f$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.
**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.
Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

**3.** $\frac{x}{\mathrm{e}^x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.
Donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$.

$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}=\frac{1}{1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

**4.** La courbe représentative de $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.

**5.** Pour tout réel $x$, $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-x\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}$

$$=\frac{e^x\left(e^x-x-e^x+1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}.$$

**6.** Pour tout réel $x$, $e^x>0$ et $\left(e^x-x\right)^2>0$.

$1-x>0 \Leftrightarrow x<1$. La fonction $f'$ est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\ ;1]$ et négative sur $[1\ ;+\infty[$. Enfin, $f(1)=\dfrac{e}{e-1}$.

On en déduit le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\dfrac{e}{e-1}$ | ↘ | $1$ |

**7.** L'observation de la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'écran de la calculatrice permet de vérifier les résultats des questions 4 et 6.

**79** **1.** $\dfrac{e^x-3}{e^x-1}=\dfrac{e^x\left(1-\dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{3}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

La proposition est **vraie**.

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$. La proposition est **fausse**.

**3.** $\lim\limits_{x\to0} e^x-3=-2$ et $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-1\right)=0$.

Lorsque $x>0$, alors $e^x-1>0$ et pour $x$ proche de 0, $f(x)<0$.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$. La proposition est **vraie**.

**4.** Pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x-3\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

$$=\frac{e^x\left(e^x-1-e^x+3\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}.$$

La proposition est **fausse**.

**5.** Pour tout $x\in\,]0\ ;+\infty[$, $f'(x)>0$. On en déduit que la fonction $f$ est croissante sur $]0\ ;+\infty[$. La proposition est **vraie**.

**80** **1.** Les points $B$ (100 ; 100) et $C\left(50\ ;\dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ appartiennent à la courbe de

$$f \Leftrightarrow \begin{cases}100e^{100a+b}=100\\ 50e^{50a+b}=\dfrac{50}{\sqrt{e}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{100a+b}=1\\ e^{50a+b}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}e^{100a+b}=e^0\\ e^{50a+b}=e^{-0,5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}100a+b=0\\ 50a+b=-0,5\end{cases}.$$

**2.** $\begin{cases}100a+b=0\\ 50a+b=-0,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-100a\\ 50a-100a=-0,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-1\\ a=0,01\end{cases}$.

Ainsi, pour tout réel $x$, $f(x)=xe^{0,01x+1}$.

**3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,01x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0,01x-1}=+\infty$ et,

par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**4.** $\dfrac{100}{e}\times0,01xe^{0,01x}=\dfrac{xe^{0,01x}}{e^1}=xe^{0,01x}e^{-1}=xe^{0,01x-1}=f(x)$.

**5.** On pose $X=0,01x$. Lorsque $x$ tend vers $-\infty$, $X$ tend vers $-\infty$.

On a $\dfrac{100}{e}\times0,01xe^{0,01x}=\dfrac{100}{e}\times Xe^X$. Or $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$.

Donc, par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{100}{e}\times Xe^X=0$.

**6.** Pour tout réel $x$, $f'(x)=e^{0,01x-1}+0,01xe^{0,01x-1}$

$$=e^{0,01x-1}(1+0,01x).$$

Pour tout réel $x$, $e^{0,01x-1}>0$ et $1+0,01x>0 \Leftrightarrow 0,01x>-1$

$$\Leftrightarrow x>-100.$$

Enfin, $f(-100)=-100e^{-2}$.

On en déduit le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-100$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-100e^{-2}$ | ↗ | $+\infty$ |

ALLEGRO

## Exercices

**81** **1.** Pour $x=y=0$, on a :

$$f(0+0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=2f(0)\Leftrightarrow f(0)=0.$$

La proposition est **vraie**.

**2.** $f(-nx+nx)=f(-nx)+f(nx)\Leftrightarrow f(0)=-nf(x)+f(nx)$

$$\Leftrightarrow f(nx)=nf(x).$$

En particulier, pour $x=1$, $f(n)=nf(1)$. Les grandeurs $f(n)$ et $n$ sont des grandeurs proportionnelles.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ avec $x\in\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=0$ avec $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} nf(1)=0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, donc $f(1)=0$.

La proposition est **vraie**.

**3.** Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}.$$

Si $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$ est un nombre fini, alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La proposition est **vraie**.

**82** **1.** Pour tout réel $x\neq1$, $f_0(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$, donc tous les points $\mathscr{C}_0$ appartiennent à la droite d'équation $y=x+1$. Ils sont donc alignés.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**2. a.** On a $f(x)=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{k}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{k}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

**b.** $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+kx-1\right)=k$ et $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$.

Lorsque $k>0$, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et, de même, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.

Lorsque $k<0$, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$ et, de même, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$.

Ainsi, pour $k\neq0$, la courbe $\mathscr{C}_k$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

**3. a.** Pour tout réel $x\neq1$, $f_k'(x)=\dfrac{(2x+k)(x-1)-\left(x^2+kx-1\right)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x+1-k}{(x-1)^2}$.

**b.** et **c.** Pour tout $x\neq1$, $(x-1)^2>0$, donc $f_k'(x)$ est du signe du polynôme $x^2-2x+1-k$. On calcule $\Delta=4-4(1-k)=4k$.

Si $k<0$, alors $\Delta<0$ et ce polynôme n'a pas de racine. D'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $f_k(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Si $k>0$, alors $\Delta>0$ et ce polynôme a deux racines réelles $x_1=1-\sqrt{k}$ et $x_2=1+\sqrt{k}$. D'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_k(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(x_1)$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $f(x_2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4. a.** À réaliser sur logiciel de géométrie.

**b.** Comme pour tout réel $k$, $f_k(0)=1$, alors le point $A\ (0\,;1)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

**c.** $\mathscr{T}_k : y=f_k'(0)x+f_k(0)$, soit $\mathscr{T}_k : y=(1-k)x+1$.

**d.** Pour tout réel $x\neq1$,

$f_k(x)-((1-k)x+1)=\dfrac{x^2+kx-1-(x-1)((1-k)x+1)}{x-1}=\dfrac{kx^2}{x-1}$.

**e.** Lorsque $k>0$, alors $\dfrac{kx^2}{x-1}$ est du signe de $x-1$, donc positif sur $]1\,;+\infty[$ et la courbe est au-dessus de sa tangente, et négatif sur $]-\infty\,;1[$ et la courbe est en dessous de sa tangente.

Lorsque $k<0$, alors $\dfrac{kx^2}{x-1}$ est du signe opposé de $x-1$, donc négatif sur $]1\,;+\infty[$ et la courbe est en dessous de sa tangente, et positif sur $]-\infty\,;1[$ et la courbe est au-dessus de sa tangente.

**83** Soit $f(x)=\sqrt{x}$ définie sur $[1\,;+\infty[$. On a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. La proposition est **fausse**.

**84** **1. Vrai.** Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$, alors il existe un nombre réel $X>0$ tel que pour tout $x\geqslant X$, $\dfrac{f(x)}{x}>2 \Leftrightarrow f(x)>2x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**2. Faux.** Contre-exemple : $f(x)=\cos(x)$. $f$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais, pour tout réel $x>0$, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant1$, donc $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**3. Vrai.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$, où $l$ désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$, alors, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

**4. Vrai.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$, où $l$ désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, alors, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

**85** **1.** $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3-x^2+3\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-1\right)=0$ et :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3-x^2+3\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2-1\right)=0$, donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$.

Par ailleurs, on a $f(x)=\dfrac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{x\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{1-\dfrac{1}{x^2}}$.

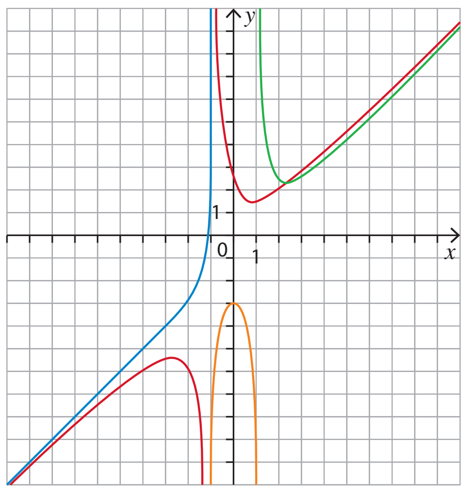
Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+2\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$, alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)=+\infty$.

Par ailleurs, on a $g(x)=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

**2.**




Il semble que la courbe de $g$ soit asymptote à celle de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**3. a.** $f(x)-g(x)=\dfrac{x^3-x^2+3}{x^2-1}-\dfrac{\left(x^2+2\right)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-2x+5}{x^2-1}$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**b.**

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+5$ | + | + | + | 0 | – |
| $x^2-1$ | + | 0 – | 0 + | | + |
| $f(x)-g(x)$ | + | – | + | 0 | – |

Donc, la courbe de $g$ coupe la courbe de $f$ au point d'abscisse $\frac{5}{2}$.

**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+5}{x^2-1}\right)=0$ car après transformation, on trouve que le numérateur tend vers $-2$ et le dénominateur tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x+5}{x^2-1}\right)=0$ car après transformation, on trouve que le numérateur tend vers $-2$ et le dénominateur vers $-\infty$.

Cela conforte la remarque faite à la question **2**.

**86** Le volume $V$ du cylindre est constant et il est donné par $V=\pi r^2 h(r)$.

Ainsi, $h(r)=\frac{V}{\pi r^2}$ et son aire latérale $S(r)=2\pi r h(r)=\frac{2V}{r}$.

Ainsi, $\lim\limits_{r\to 0} h(r)=+\infty$ et $\lim\limits_{r\to 0} S(r)=+\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{r\to+\infty} h(r)=0$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} S(r)=0$.

**87** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{e^x}=+\infty$.

Par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. De plus, $\lim\limits_{X\to 0} e^X=1$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{e^x}=1$.

Or $\lim\limits_{X\to 1} e^X=e$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)=e$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x)=e^e$ et, par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)=+\infty$.

**88** **1.** La pente $p$ de la droite $(OM)$ est donnée par $p=\frac{f(x)}{x}$.

**2.** Lorsque $f(x)=\sqrt{x}$, pour tout réel $x>0$, $p=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ainsi, lorsque $x$ tend vers 0, cette pente tend vers 0.

Pour tout nombre réel $a>0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite d'équation $y=ax$ pour $x$ suffisamment grand.

**3.** Lorsque $f(x)=x^2$, pour tout réel $x>0$, $p=\frac{x^2}{x}=x$.

Ainsi, lorsque $x$ tend vers $+\infty$, pour tout nombre réel $a>0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite d'équation $y=ax$ pour $x$ suffisamment grand.

**89** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+2}\geqslant 0$,

donc $2x-1\leqslant 2x-1+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+2}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$,

donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+2}=+\infty$.

**90** **1. a.** $f(0)=3\times 0\times e^{-0{,}25\times 0}+2=2$. Au début de l'hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang est de $2\ \mu g\cdot mL^{-1}$.

**b.** $f(12)=3\times 12\times e^{-0{,}25\times 12}+2=36e^{-3}+2\approx 3{,}79$.

Ainsi, 12 secondes après le début, le taux de vasopressine dans le sang est de $3{,}79\ \mu g\cdot mL^{-1}$, soit un taux supérieur à la limite de $2{,}5\ \mu g\cdot mL^{-1}$.

**c.** On pose $X=-0{,}25t$, lorsque $t$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $-\infty$. On a $3te^{-0{,}25t}+2=-12Xe^X+2$. Or $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{X\to-\infty} -12Xe^X+2=2$.

À terme, le taux de vasopressine dans le sang tend vers $2\ \mu g\cdot mL^{-1}$.

**2.** $f'(t)=3e^{-0{,}25t}-0{,}75te^{-0{,}25t}=e^{-0{,}25t}(-0{,}75t+3)$.

Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$, $e^{-0{,}25t}>0$.

$-0{,}75t+3>0\Leftrightarrow t<4$. La fonction $f$ est positive sur l'intervalle $[0\,;4]$ et négative sur $[4\,;+\infty[$ et $f(4)=12e^{-1}+2\approx 6{,}41$.

On déduit le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | 0 | – | |
| $f(t)$ | $2$ | ↗ | $12e^{-1}+2$ | ↘ | $2$ |

**3.** Le taux maximal de vasopressine dans le sang est de $12e^{-1}+2\ \mu g\cdot mL^{-1}$, soit environ $6{,}41\ \mu g\cdot mL^{-1}$ et il est atteint au bout de 4 secondes.

**91** **1.** $f(0)=20\Leftrightarrow 180-k=20\Leftrightarrow k=160$.

**2.** $f(20)=40\Leftrightarrow 180-160e^{-20\alpha}=40$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha\approx 0{,}007$ à $10^{-3}$ près.

**3.** $f(t)=180-160e^{-0{,}007t}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}007t=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$, donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}007t}=0$.

Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=180$.

La température limite du gâteau est de 180 °C.

**4.** $f'(t)=1{,}12e^{-0{,}007t}$. Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$, $1{,}12e^{-0{,}007t}>0$.

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $20$ | ↗ | $180$ |

**5. a.**

```
n ← 0
T ← 20
Tant que T < 179 faire
        n ← n + 1
T ← 180 – 160e^(–0,007n)
Fin tant que
Afficher n
```

**b.**

```
def seuil():
    n=0
    T=20
    while T<179:
        n=n+1
        T=180-160*exp(-0.007*n)
    return(n)
```

```
>>> seuil()
726
>>>
```

Il faudra patienter 726 minutes, soit plus de 12 heures pour que la température du gâteau atteigne 179 °C.



© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**92** **1.** On a, pour tout réel $x$

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1 \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) \leqslant x \\ x < E(x)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) \leqslant x \\ x-1 < E(x) \end{cases}.$$

On a donc bien, pour tout réel $x$, $x-1 \leqslant E(x) < x$.

**2.** Pour tout réel $x>0$, on a :

$$x-1 \leqslant E(x) < x \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \leqslant \frac{E(x)}{x} < \frac{x}{x} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} \leqslant \frac{E(x)}{x} < 1.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

**3.** Pour tout $x \neq 0$, $\frac{1}{x}-1 \leqslant E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

Si $x>0$, alors $1-x \leqslant xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1-x = 1$, donc,

d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Si $x<0$, alors $1-x \geqslant xE\left(\frac{1}{x}\right) > 1$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1-x = 1$, donc,

d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

**93** **1.** 1. En mettant les termes au même dénominateur, on trouve :

$$f(x) = \frac{(a+b+c)x^5 + (a\beta + a\gamma + b\alpha + b\gamma + c\alpha + c\beta)x^4}{(x+\infty)(x+\beta)(x+\gamma)}$$
$$\frac{+(a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta)x^3}{(x+\infty)(x+\beta)(x+\gamma)}$$

Supposons que $a+b+c=0$ et que $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

$a\beta + a\gamma + b\alpha + b\gamma + c\alpha + c\beta$
$= (a\beta + a\gamma + b\alpha + b\gamma + c\alpha + c\beta) + (a\alpha + b\beta + c\gamma)$
$= (a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma) = 0$

On en déduit que :

$$f(x) = \frac{(a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta)x^3}{(x+\infty)(x+\beta)(x+\gamma)}.$$

Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta$, donc la limite est finie.

Réciproquement, on suppose que la limite de $f$ en $+\infty$ est finie.

Alors les termes en $x^5$ et $x^4$ du numérateur de $f$ doivent être nuls.

On en déduit que $a+b+c=0$

et $a\beta + a\gamma + b\gamma + b\alpha + c\beta + c\alpha = 0$.

Or $0 = (a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)$
$= (a\beta + a\gamma + b\gamma + b\alpha + c\beta + c\alpha) + (a\alpha + b\beta + c\gamma)$
$= a\alpha + b\beta + c\gamma$.

On a donc bien les égalités $a+b+c=0$ et $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

**2.** Si $a=b=c$, alors on a $f(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Réciproquement, si on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La limite de $f$ en $+\infty$ est finie et elle vaut 0.

Donc, d'après la question **1**, cela entraîne que $a+b+c=0$, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ et $a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0$.

$\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont trois réels distincts, donc on peut supposer que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \gamma$.

On doit donc résoudre le système suivant avec $\alpha \neq \beta$ :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ (-b-c)\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ (-b-c)\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b(\beta-\alpha) + c(\gamma-\alpha) = 0 \\ b(\alpha\gamma - \beta\gamma) + c(\alpha\beta - \beta\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b = \dfrac{-c(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha} \\ b\gamma(\alpha-\beta) + c\beta(\alpha-\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b = \dfrac{-c(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha} \\ \dfrac{-c(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}\gamma(\alpha-\beta) + c\beta(\alpha-\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b = \dfrac{-c(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha} \\ c(\gamma(\gamma-\alpha) + \beta(\alpha-\gamma)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b = \dfrac{-c(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha} \\ c(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha) = 0 \end{cases}$$

On a $\alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \gamma$ donc la troisième équation entraîne $c=0$, ce qui entraîne avec les deux premières équations $a=b=c=0$.

**3.** $f(x) = \frac{ax^3}{x+\alpha} + \frac{bx^3}{x+\beta} + \frac{cx^3}{x+\gamma} = x^3\left(\frac{a}{x+\alpha} + \frac{b}{x+\beta} + \frac{c}{x+\gamma}\right)$

L'expression $x^3\left(\frac{\beta-\gamma}{x+\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{x+\beta} + \frac{\alpha-\beta}{x+\gamma}\right)$ est donc l'expression de $f(x)$ avec $a = \beta-\gamma$, $b = \gamma-\alpha$ et $c = \alpha-\beta$.

D'une part, $a+b+c = \beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta = 0$.

D'autre part, $a\alpha + b\beta + c\gamma = (\beta-\gamma)\alpha + (\gamma-\alpha)\beta + (\alpha-\beta)\gamma$
$= \beta\alpha - \gamma\alpha + \gamma\beta - \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma = 0.$

D'après la question 1, on en déduit que la limite de $f$ en $+\infty$ est finie et que cette limite vaut :

$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = (\beta-\gamma)\beta\gamma + (\gamma-\alpha)\alpha\gamma + (\alpha-\beta)\alpha\beta$
$= \alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta)$

VERS LE BAC

# Exercices

**94** **1. a.** La fonction $g$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$, puis décroissante sur l'intervalle $[1\,;10]$.

**b.** La concentration maximale est égale à 2 mg·L⁻¹ et est atteinte une heure après l'injection.

**c.** La concentration est supérieure à 1,2 mg·L⁻¹ lorsque $t$ [0,3 ; 3].

**2. a.** Pour tout $t \in [0\,;10]$,

$$g'(t) = \frac{4(t^2+1) - 2t \times 4t}{(t^2+1)} = \frac{-4t^2+4}{(t^2+1)} = \frac{4(1-t)(1+t)}{(t^2+1)}.$$

**b.** Pour tout $t \in [0\,;10]$, $\frac{4(1+t)}{(t^2+1)} > 0$. Donc $g'(t)$ est du signe de $1-t$, c'est-à-dire :

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

– sur l'intervalle $[0\,;1]$, $g'(t) \geqslant 0$ et donc la fonction $g$ est croissante ;
– sur l'intervalle $[1\,;10]$, $g'(t) \leqslant 0$ et donc la fonction $g$ est décroissante.
Ainsi, la concentration maximale est atteinte exactement une heure après l'injection.

**3.** $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{4t}{t^2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{4}{t\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)} = 0\,.$

La concentration de l'antibiotique tend vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**4.** $g(t) \geqslant 1{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{4t}{1+t^2} \geqslant 1{,}2 \Leftrightarrow 4t \geqslant 1{,}2 + 1{,}2t^2$

$\Leftrightarrow -1{,}2t^2 + 4t - 1{,}2 \geqslant 0\,.$

On calcule $\Delta = 10{,}24$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = 3$. Il est donc positif sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;3\right]$. Ainsi, le temps d'antibiotique utile est égal à $\dfrac{8}{3}$ heures, soit 2 h 40 min.

**5.**

**Variable :**
$n$ est un entier naturel
**Traitement :**
$n$ prend la valeur 1
Tant que $\dfrac{4n}{1+n^2} \geqslant 0{,}01$
$n$ prend la valeur $n$+1
Fin tant que
**Sortie :**
Afficher $n$

**95** **1.** Réponse b.
**2.** Réponse a.
**3.** Réponse c.

**96** **1.** Graphiquement, on voit que la fonction est définie en $x = 2$ et que son image par la fonction $f$ est 4.
Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = f(2) = 4$. On remarque aussi que $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) \approx 3{,}5$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$, donc la fonction $f$ n'admet pas de limite en 2. **L'affirmation est fausse.**

**2. L'affirmation est fausse**, la fonction $g(x) = 4 + \cos(x)$ est un contre-exemple.

**3.** $\dfrac{x-1}{x^2+1} = \dfrac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2+1} = 0$. Les limites à droite et à gauche de l'encadrement en $+\infty$ étant différentes, elles ne permettent pas de conclure sur la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. **L'affirmation est fausse.**

**4.** $e^{2x} - e^x - 2x = e^{2x}\left(1-\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right).$

On pose $X = 2x$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $+\infty$ et

$e^{2x}\left(1-\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = e^X\left(1-\dfrac{1}{e^{\frac{X}{2}}}-\dfrac{X}{e^X}\right).$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$. Par passage à l'inverse, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.

$\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} e^T$, donc, par composition, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{\frac{X}{2}} = +\infty$ et, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^{\frac{X}{2}}} = 0$.

$\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - e^x - 2x\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X\left(1-\dfrac{1}{e^{\frac{X}{2}}}-\dfrac{X}{e^X}\right) = +\infty\,.$

**L'affirmation est vraie.**

**5.** $x^2e^{-x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction $x^2e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$. **L'affirmation est vraie.**

**97** **1.**

| $x$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\cos(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\tan(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2.** $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$.

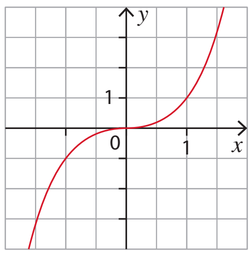
Lorsque $x > -\dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos(x) > 0$ et, pour $x$ proche de $-\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x) > 0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\x>-\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$.

**3.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0\,.$

Lorsque $x < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos(x) > 0$ et, pour $x$ proche de $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x) > 0$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$.

**98** **Partie A**
La fonction $f$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$ et sa dérivée par la courbe $\mathscr{C}_2$. En effet, lorsque la fonction $f'$ est positive sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[3\,;+\infty[$, la fonction $f$ est bien croissante et lorsque $f'$ est négative sur l'intervalle $[-1\,;3]$, la fonction $f$ est décroissante.

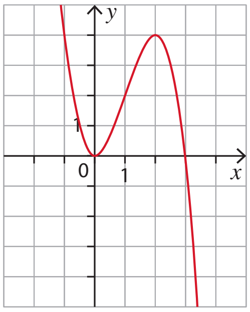
**Partie B**
**1.**




La fonction cube convient :
– elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ ;
– $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
– $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**2.**




**99** **1. a.** $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}$. Pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $f'(x)>0$, donc $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{5}{x+1}=0$ et donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=6$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $6$ |

**b.** $f(x)=x \Leftrightarrow 6-\dfrac{5}{x+1}=x \Leftrightarrow 6(x+1)-5=x(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2-5x-1=0$.

$\Delta=29$, donc deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

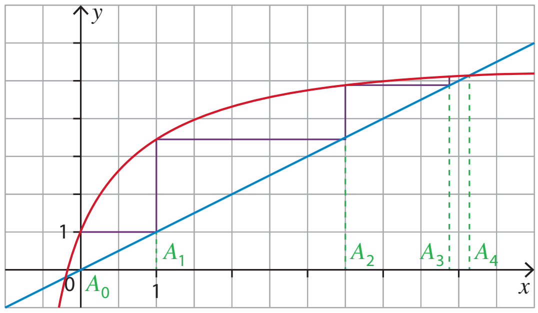
Or $x_2>0$ et $x_1<0$, donc $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

**c.** Si $x$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$, alors $0\leqslant x\leqslant\alpha$, donc $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha)$, car $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Or $f(0)=1$ et $f(\alpha)=\alpha$, donc $1\leqslant f(x)\leqslant\alpha$, d'où $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

Si $x$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$, alors $\alpha\leqslant x$, donc $f(\alpha)\leqslant f(x)$, car $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

**2. a.**




On peut conjecturer que la suite $(u_n)$ est croissante et qu'elle converge vers $\alpha$.

**b.** On montre par récurrence la propriété :

$P_n$ : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$ pour tout entier naturel $n$.

• Initialisation : $u_0=0$ et $u_1=6-\dfrac{5}{0+1}=1$, on a bien $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\alpha$, donc $P_0$ est vraie.

• Hérédité : On suppose que pour un certain entier naturel $n$, $P_n$ est vraie, c'est-à-dire :

$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$, alors $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(\alpha)$, car $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Or $f(0)=1$ et $f(\alpha)=\alpha$, donc $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$.

On a bien $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$, $P_{n+1}$ est vraie.

• Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

**c.** La suite $(u_n)$ est croissante (car $u_n\leqslant u_{n+1}$)et majorée (par $\alpha$), donc elle converge vers un réel $l$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=6-\dfrac{5}{l+1}$.

Par unicité de la limite, $6-\dfrac{5}{l+1}=l$.

D'après la question 1b, $l=\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

**3.** Si $u_0\in[0\,;\alpha[$, la suite $(u_n)$ est croissante et converge vers $\alpha$.

Si $u_0=\alpha$, la suite est constante et égale à $\alpha$.

Si $u_0\in]\alpha\,;+\infty[$, la suite $(u_n)$ est décroissante et converge vers $\alpha$.

# Exercices AP

**100**

## Questions Va piano

**1. a.** D'après le tableau, pour tout $x\in]-2\,;3[$, $f(x)>0$.
Ainsi, pour $x$ proche de 3, $f(x)>0$.

**b.** $\lim\limits_{x\to3}x^2-3x-10=-10$ et $\lim\limits_{x\to3}x-3=0$. Par quotient et d'après la question précédente, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}f(x)=+\infty$.

**2.** D'après le tableau, pour tout $x\in]3\,;5[$, $f(x)<0$.
Ainsi, pour $x$ proche de 3, $f(x)<0$.

$\lim\limits_{x\to3}x^2-3x-10=-10$ et $\lim\limits_{x\to3}x-3=0$.

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}f(x)=-\infty$.

**3.** La droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$.

## Questions Moderato

**1.** Le trinôme $m(x)=x^2-3x-10$ a pour discriminant $\Delta=49$.

Il admet donc deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{3-\sqrt{49}}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{49}}{2}=5$. Or $a=1>0$, on en déduit que la fonction $m$ est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]\cup[5\,;+\infty[$ et négative sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

$d(x)>0\Leftrightarrow x-3>0\Leftrightarrow x>3$, la fonction $d$ est négative sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$ et positive sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

**2.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x-10$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3.** $\lim\limits_{x\to3}x^2-3x-10=-10$ et $\lim\limits_{x\to3}x-3=0$.

Lorsque $x\in]-2\,;3[$, alors $f(x)>0$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = +\infty$.

**4.** $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 3x - 10 = -10$ et $\lim\limits_{x\to 3} x - 3 = 0$.
Lorsque $x \in ]3\ ;\ 5[$, alors $f(x) < 0$.
Donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -\infty$.

**5.** La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$.

## Questions Allegro

**1. a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -\infty$.
(Voir Questions Moderato pour les justifications).
**b.** La courbe représentative de la fonction $f$ admet la droite d'équation $x = 3$ comme asymptote verticale.
**2.** Pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ 3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-3) - \left(x^2 - 3x - 10\right)}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{(2x-3)(x-3) - \left(x^2 - 3x - 10\right)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 19}{(x-3)^2}.$$

Le trinôme $x^2 - 6x + 19$ a pour discriminant $\Delta = -40$.
Il n'admet donc pas de racine. Or $a = 1 > 0$. On en déduit que le trinôme $x^2 - 6x + 19$ est strictement positif sur $]-\infty\ ;\ 3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$.
De plus, pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ 3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$, $(x-3)^2 > 0$.
On en déduit que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 3[$ et strictement croissante sur $]3\ ;\ +\infty[$.

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{x\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}\right)}{1 - \frac{3}{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$.
Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3.** $x - 3 + \dfrac{cx+d}{x-3} = \dfrac{x^2 - 6x + 9 + cx + d}{x-3}$
$$= \frac{x^2 + (c-6)x + 9 + d}{x-3}.$$

Par identification, $\begin{cases} c - 6 = -3 \\ 9 + d = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ d = -19 \end{cases}$.
Ainsi, $f(x) = x - 3 + \dfrac{3x - 19}{x-3}$.

**4.** $f(x) - (x-3) = \dfrac{3x-19}{x-3} = \dfrac{3 - \frac{19}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{19}{x}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$.
Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 3$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x-3) = 3$. Or $3 \neq 0$, donc la droite d'équation $y = x - 3$ n'est pas asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction $f$.

**101** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right) = +\infty$.

Pour tout $x \in ]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{\sqrt{x} - \frac{2}{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} - \frac{2}{x}}{x} = 0$.
La courbe de $f$ présente une branche parabolique de direction $(Ox)$.
**2.** $x - \dfrac{x^3}{3} = -\dfrac{1}{3}x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{3}x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = 1$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = -\infty$.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x - \frac{x^3}{3}}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = -\infty$.
La courbe de $f$ présente une branche parabolique de direction $(Oy)$.
**3.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 + x^2 \leqslant x^2 + \cos(x) \leqslant 1 + x^2$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1 + x^2\right) = +\infty$.
Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 + \cos(x)\right) = +\infty$.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2 + \cos(x)}{x} = x + \dfrac{\cos(x)}{x}$.
Or, pour tout $x \neq 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + \cos(x)}{x} = +\infty$.
La courbe de $f$ présente une branche parabolique de direction $(Oy)$.
**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par opérations sur les limites,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.
La courbe de $f$ ne présente pas de branche parabolique.

**102** **1.** On a, pour tout $x \neq 1$,
$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n}\left(\frac{1 - (1-x)\left(1 + x + \ldots + x^n\right)}{1-x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^n}\left(\frac{1 - \left(1 - x^{n+1}\right)}{1-x}\right) = \frac{x}{1-x}.$$
Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$.
**2.** Pour tout $x \neq 1$,
$$1 + x + \ldots + x^n + x^n\varepsilon_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$$
$$+ \frac{1}{1-x} - \left(1 + x + \ldots + x^n\right) = \frac{1}{1-x}.$$
**3. a.** Le développement limité à l'ordre 3 de
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$.



© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo

**b.** En utilisant ce développement pour $x = 0{,}1$, on obtient $\frac{1}{0{,}9} \approx 1{,}111$.

On obtient une valeur approchée à 0,001 près de $\frac{1}{0{,}9}$.

**4.** Le développement limité à l'ordre 1 de $\frac{1}{1-x} = 1 + x$.

En utilisant ce développement pour $x = 0{,}1$, on obtient $\frac{1}{0{,}9} \approx 1{,}1$.

On obtient une valeur approchée à 0,1 près de $\frac{1}{0{,}9}$.

Le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$.

En utilisant ce développement pour $x = 0{,}1$, on obtient $\frac{1}{0{,}9} \approx 1{,}11$.

On obtient une valeur approchée à 0,01 près de $\frac{1}{0{,}9}$.

© Hachette Livre 2020 – Guide pédagogique, mathématiques Terminale Spécialité, collection Barbazo